STUDIUL FRECĂRII DE ROSTOGOLIRE LA SCARA MICRO PRIN METODA OSCILAŢIILOR LIBERE

Dumitru OLARU, Ciprian Vasile STAMATE

Pentru a determina pierderile prin frecare în cazul unui microtribosistem de rostogolire s-a pus la punct o metodologie bazata pe oscilaţia libera a unei microbile pe o suprafaţă sferică aflată doar sub influenta gravitaţiei. În figura 1 este prezentat principiul metodei. În funcţie de mărimea momentului de frecare de rostogolire M_r şi de poziţia de start (unghiul φ_0), microbila va avea un anumit număr de oscilaţii pe suprafaţa sferică dată. In funcţie de numărul de oscilaţii complete ale microbilei se poate determina valoarea momentului de frecare de rostogolire *Mr* precum şi coeficientul de frecare la rostogolire

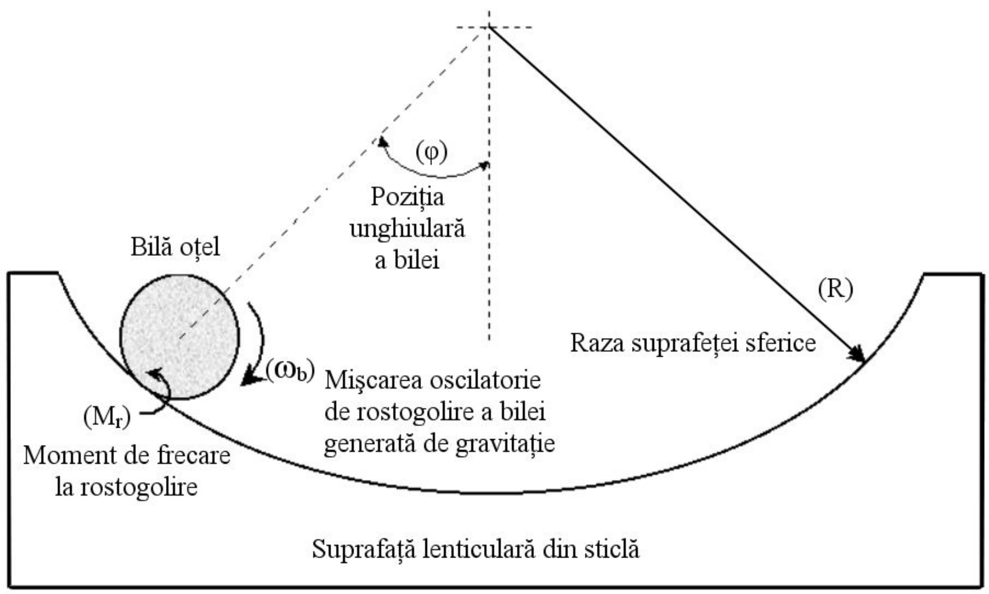


Figura 1 Oscilaţia bilei pe o suprafaţa sferică

1. Modelarea matematică a oscilaţiilor libere ale microbilei

Când microbila rulează pe suprafaţa sferică din poziţia unghiulară φ_0 în poziţia unghiulară φ, aşa cum se observă în figura 2, poate fi scrisă următoarea ecuaţie energetică:

$$\Delta W + M_r \cdot \Delta\theta = G \cdot \Delta h \qquad (1)$$

unde: - ΔW = variaţia energiei cinematice a microbilei;

- $M_r \cdot \Delta\theta$ = energia pierduta la contactul bila-suprafaţă de rostogolire;
- $G \cdot \Delta h$ = energia potenţiala a microbilei;

Pentru o nicrobilă care are viteza iniţială zero (la poziţia unghiulara φ_0) variaţia energiei cinematice este data de relaţia:

$$\Delta W = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{J \cdot \omega b^2}{2} \tag{2}$$

Variaţia rotaţiei microbilei bilei poate fi exprimata prin relaţia: $\Delta\theta = \frac{R}{r}(\varphi_0 - \varphi)$

Ecuaţiile (1) – (2) permit determinarea următoarei ecuaţii:

$$\frac{7}{10} m \cdot v^2 + \frac{R}{r} \cdot M_r \cdot (\varphi_0 - \varphi) - m \cdot g \cdot R \cdot (\cos\varphi - \cos\varphi_0) = 0 \tag{3}$$

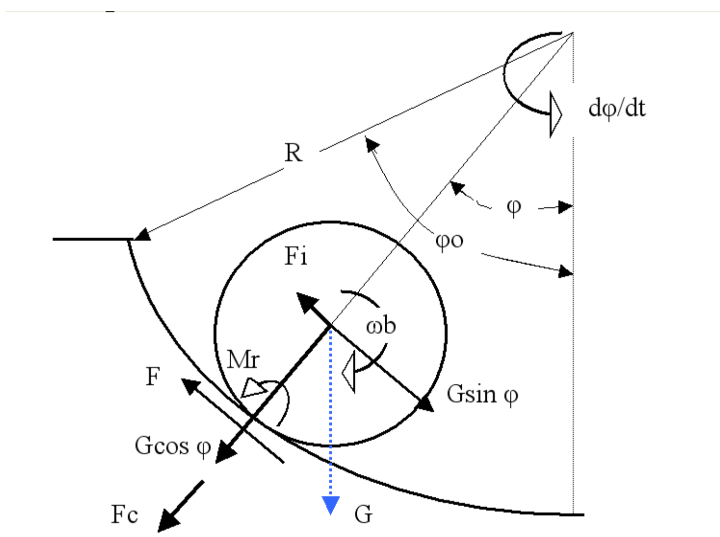


Figura 2. Reprezentarea forţelor şi momentelor de rezistenţă ce acţionează asupra microbilei i la rularea pe suprafaţa sferică

Ecuaţia (3) conduce la următoarea ecuaţie diferenţială pentru rostogolirea microbilei la coborâre:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k \cdot \sin\varphi - b = 0 \tag{4}$$

unde: $k = \sqrt{\frac{5 \cdot g}{7 \cdot R}}$ şi $b = \frac{5}{7} \cdot \frac{M_r}{m \cdot r \cdot R}$

Aproximând $\sin\varphi \approx \varphi$ (pentru oscilaţii mici), ecuaţia (4) devine o ecuaţie diferenţială neomogenă şi poate fi rezolvată cu următoarea soluţie generală:

$$\varphi(t) = \frac{b}{2k^2} + C1 \cdot \cos(k \cdot t) + C2 \cdot \sin(k \cdot t) \tag{5}$$

Constantele C1 şi C2 sunt determinate în acord cu condiţiile iniţiale: t=0, $\varphi = \varphi_0$ şi $d\varphi/dt$=0 (viteza centrului microbilei) iar variaţia poziţiei unghiulare în funcţie de timp la coborârea microbilei devine:

$$\varphi(t) = \frac{b}{2k^2} + (\varphi_0 - \frac{b}{2k^2}) \cdot \cos(k \cdot t) \tag{6}$$

Când microbila rulează pe suprafaţa sferică şi urcă din cauza inerţiei, din poziţia unghiulară corespunzătoare lui $\varphi = 0$ în poziţia unghiulara φ, când viteza microbilei este zero, se obţine următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k \cdot \sin\varphi + b = 0 \tag{7}$$

Cu aproximaţia $\sin\varphi \approx \varphi$ ecuaţia (7) poate fi rezolvată şi se obţine următoarea soluţie generală:

$$\varphi(t) = -\frac{b}{2k^2} + C3 \cdot \cos(k \cdot t) + C4 \cdot \sin(k \cdot t) \tag{8}$$

Constantele C3 şi C4 sunt determinate în acord cu următoarele condiţii iniţiale:

la t=0, $\varphi = 0$ şi $d\varphi/dt = v_0$, unde v_0 este viteza maximă a microbilei oscilante.

Soluţia pentru condiţiile menţionate este:

$$\varphi(t) = -\frac{b}{2k^2} + \frac{b}{2k^2} \cdot \cos(k \cdot t) + \frac{v_0}{k} \cdot \sin(k \cdot t) \tag{9}$$

2. Forţele tangenţiale şi normale ce acţionează asupra bilei

În acord cu figura 2, echilibrul forţelor ce acţionează asupra unei microbile care se rostogoleşte, permite următoarele relaţii pentru forţele tangenţiale şi normale:

$$G \cdot \sin(\varphi) - Fi = F \tag{10}$$

$$Fc + G \cdot \cos(\varphi) = N \tag{11}$$

Forţa inerţială *Fi* şi forţa centrifuga *Fc* pot fi exprimate rezolvând următoarele ecuaţii:

$$Fi = -m \cdot R \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{12}$$

$$Fc = m \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cdot R \tag{13}$$

Expresiile finale pentru forţa tangenţială F(t) şi forţa normală N(t) sunt următoarele:

$$F(t) = \frac{2}{7} \cdot m \cdot g \cdot \sin\varphi(t) + \frac{5}{7} \cdot \frac{M_r}{r} \tag{14}$$

$$N(t) = \frac{1}{7} \cdot m \cdot g \cdot \left[17\cos\varphi(t) - 10\cos\varphi_0\right] - \frac{10}{7} \cdot \frac{M_r}{r} \cdot \left[\varphi_0 - \varphi(t)\right] \tag{15}$$

Un coeficient de frecare convenţional în cazul microbilei a fost introdus în acord cu următoarea relaţie, când acceleraţia bilei este zero (poziţia $\varphi(t) = 0$):

$$\mu_r = \left(\frac{F(t)}{N(t)}\right)_{\varphi(t)=0} \tag{16}$$

3 Metodologia de realizare experimentală

Oscilaţiile libere ale unor microbile de oţel pe o suprafaţa sferică de sticlă sunt înregistrate cu o camera video. Pentru o poziţie unghiulara data a bilei, φ_0 şi un moment de fricţiune impus *M_r*, din ecuaţia (6) se determină timpul t_1 când $\varphi(t_1) = 0$ (microbila ajunge la nivelul cel mai jos);

(i) Pentru $t = t_1$ se determină viteza maxima unghiulara a bilei $\frac{d\varphi(t)}{dt} = v_0$;

(ii) Din ecuaţia (9) se determină timpul t_2 când viteza unghiulara a microbilei, în urcare pe suprafaţa sferică devine zero şi poziţia bilei corespunde noului nivel corespunzător unghiului φ_1;

(iii) Procedeul se repetă cu pasul (i) pentru noua poziţie iniţială a bilei φ_1, când $\varphi_1 < \varphi_0$;

Numărul oscilaţiilor simulate se compară cu valorile experimentale înregistrate de camera video. Dacă numărul de oscilaţii rezultat din calcul este diferit de cel înregistrat video, se reface calculul cu altă valoare a momentului de frecare la rostogolire *Mr*.

Pentru rezolvarea succesivă a ecuaţiilor de urcare şi de coborâre a microbilei pe suprafaţa sferică dată s-a realizat un program în utilitarul MathCad. Pe baza datelor impuse: diametrul microbilei d, Raza de curbură a suprafeţei sferice R, unghiul iniţial de pornire a oscilaţiilor φ_0 şi a numărului de oscilaţii complete se obţine, prin câteva încercări, valoarea reală a momentului de frecare de rostogolire Mr. Apoi se calculează coeficientul de frecare de rostogolire cu relaţia (16).

Programul de calcul este prezentat în ANEXA 1.

4 Rezultate numerice privind influenţa umidităţii asupra coeficientul de frecare la rostogolire pentru microsisteme

Se prezintă în continuare modul în care influenţează umiditatea asupra frecării de rostogolire la o microbilă cu diametrul de 1mm.

Pentru a se pune în evidenţă influenţa apei condensate pe suprafaţa sferică s-au făcut încercări la două temperaturi: 70^0 C şi 10^0 C. Umiditatea atmosferica relativa a fost cuprinsa intre valorile (70 – 80)%. Experimentele au fost realizate pentru o microbilă cu diametrul de 1 mm oscilând pe o suprafaţă sferică de sticlă cu raza de R = 57 mm şi un diametru de 70 mm.

Bazate pe înregistrarea video a oscilaţiilor libere ale bilei s-a determinat momentul frecării de rostogolire M_r cu metoda descrisa anterior. Experimentele realizate la 70°C sunt considerate ca fiind oscilaţiile bilei în condiţii de frecare uscată în timp ce la 10^0 C pe suprafaţa sferică se depune condens.

In fig. 3 se prezintă numărul de oscilaţii şi valoarea coeficientului de frecare la rostogolirea microbilei în condiţii uscate (temperatura suprafeţei sferice fiind de 70^0 C). S-a obţinut un coeficient de frecare de rostogolire de aprox. 0.022 iar momentul de frecare rezultat a fost Mr = 0,7µNmm, cu 20 de oscilaţii libere ale microbilei.

Pentru a evidenţia efectul de capilaritate în frecarea de rostogolire în microsisteme s-au realizat experimente asemănătoare la o temperatura de 10°C pe suprafaţa sferică existând apă condensată.

In fig.4se prezintă numărul de oscilaţii şi valoarea coeficientului de frecare la rostogolirea microbilei în condiţii de capilaritate (temperatura suprafeţei sferice fiind de 10^0 C). S-a obţinut un coeficient de frecare de rostogolire de aprox. 0.06 iar momentul de frecare rezultat a fost Mr = 1,9µNmm, cu 8 de oscilaţii libere ale microbilei.

Experimentul a pus în evidenţă importanţa deosebită a prezenţei moleculelor de apă condensate pe suprafeţe asupra frecării de rostogolire la scară micro.

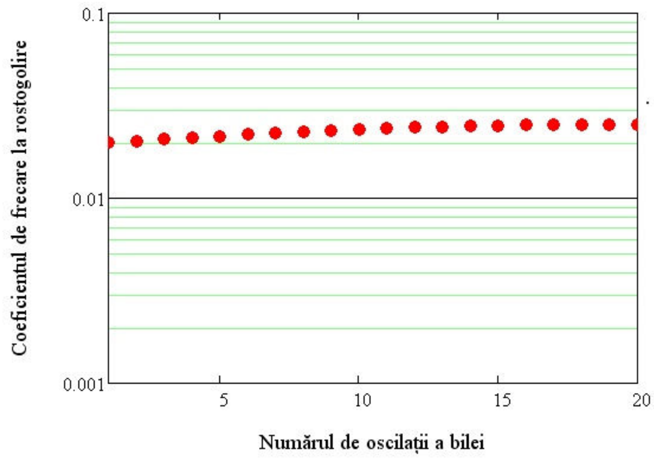


Figura 3 Coeficientul de frecare pentru bila cu diametrul de 1mm
şi numărul de oscilaţii complete ale microbilei la temperatura de70^0 C

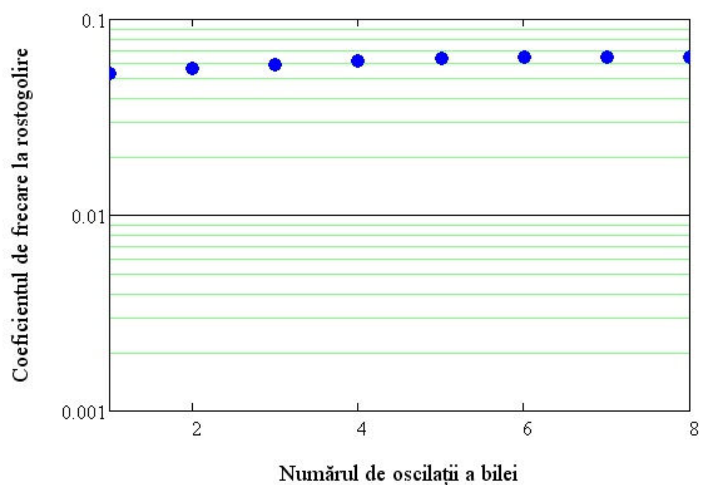


Figura 4 Coeficientul de frecare pentru bila cu diametrul de 1mm
şi numărul de oscilaţii complete ale microbilei la temperatura de 10^0 C

5. Concluzii

Metoda permite evaluarea momentului de frecare de rostogolire dintre o bilă şi o suprafaţă sferică, cu posibilitatea evidenţierii efectului de capilaritate şi de adeziune moleculară atunci când bila are diametre de 1-2 mm sau mai mici.

Pentru diametre mai mari ale bilelor efectul de adeziune şi de capilaritate devine nesemnificativ aşa cum se poate vedea în referinţele bibliografice [1] şi [2].

6. Referinţe bibliografice

1. Olaru, DN; Stamate, C; Prisacaru, G. - *Rolling Friction in a MicroTribosystem*, **TRIBOLOGY LETTERS**, Volume: 35, Issue: 3, 2009, Pages: 205-210**,** http://link.springer.com/journal/11249;
2. Ciprian Vasile Stamate, CONTRIBUŢII LA STUDIUL TEORETIC ŞI EXPERIMENTAL

AL FORŢELOR ÎN MICROSISTEME BIOLOGICE ŞI MECATRONICE, Teză de doctorat, Universitatea Tehnică „Gheorghe Asachi” din Iaşi, 2012.

ANEXA 1

ROSTOGOLIREA BILEI PE O SUPRAFATA SFERICA

Date generale

$g := 9.81 \qquad R := 0.057 \qquad r := 0.0005 \qquad \rho := 7800 \qquad \phi0 := 37 \cdot \frac{\pi}{180}$

$m := 4 \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{3} \cdot \rho \qquad k := \left(5 \cdot \frac{g}{7 \cdot R}\right)^{0.5}$

Momentul de frecare de rostogolire M

$M := 0.0000000007 \qquad \gamma := 0.072 \qquad \chi := 0$

Parametrul de franare b

$b := 5 \cdot \frac{M}{7 \cdot m \cdot R \cdot r} \qquad \mu := \frac{M}{m \cdot g \cdot r} \qquad T := \gamma \cdot \pi \cdot 3 \cdot r$

$\mu = 0.035$

Formula de recurenta utilizata:

$$\phi_{i+1} := \frac{-b}{2 \cdot k^2} + \frac{b}{2 \cdot k^2} \cdot \cos\left[k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \operatorname{atan}\left[2 \cdot \frac{k}{b} \cdot \left(\phi_i + \frac{-b}{2 \cdot k^2}\right) \cdot k \cdot \sin\left[k \cdot \left(\operatorname{acos}\left(\frac{1}{1 - \phi_i \cdot 2 \cdot \frac{k^2}{b}}\right) \cdot \frac{1}{k}\right)\right]\right]\right]\right] +$$

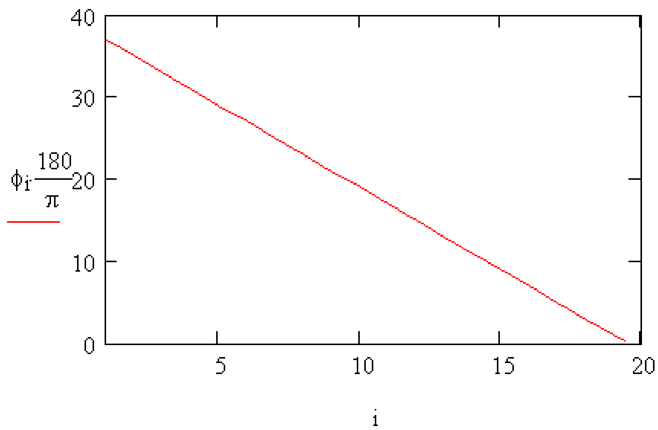
$$+ \frac{1}{k} \cdot \left[\left(\phi_i + \frac{-b}{2 \cdot k^2}\right) \cdot k \sin\left[k \cdot \left(\operatorname{acos}\left(\frac{1}{1 - \phi_i \cdot 2 \cdot \frac{k^2}{b}}\right) \cdot \frac{1}{k}\right)\right]\right] \cdot \sin\left[k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \operatorname{atan}\left[2 \cdot \frac{k}{b} \cdot \left(\phi_i + \frac{-b}{2 \cdot k^2}\right) \cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot k \cdot \sin\left[k \cdot \left(\operatorname{acos}\left(\frac{1}{1 - \phi_i \cdot 2 \cdot \frac{k^2}{b}}\right) \cdot \frac{1}{k}\right)\right]\right]\right]\right]$$

Pentru momentul de frecare impus M numărul de oscilaţii corespunde cu cel măsurat (20 oscilaţii)

$$\phi_i \cdot \frac{180}{\pi} =$$

37
34.998
32.996
30.994
28.992
26.989
24.987
22.985
20.983
18.981
16.979
14.977
12.975
10.973
8.97
6.968



$$\mu_i := \frac{5 \cdot M}{m \cdot g \cdot r \cdot \left(17 - 10 \cdot \cos(\phi_i)\right) - 10 \cdot M \cdot \phi_i}$$

